

INTERPOLAÇÃO POR FUNÇÕES PONDERADAS

ARMANDO ALBERTAZZI GONÇALVES JÚNIOR, Prof., M.Sc.

CERTI

Centro Regional de Tecnologia em Informática de Santa Catarina
Departamento de Engenharia Mecânica da
Universidade Federal de Santa Catarina
Caixa Postal 5053
88.041 - Florianópolis - SC

Pesquisador visitante do NPQ da SID INFORMÁTICA

1-RESUMO

Este trabalho apresenta um novo conceito empregado para a interpolação de funções matemáticas, com várias aplicações dentro da computação gráfica. Consiste na subdivisão do domínio global em elementos, da interpolação local dentro de cada elemento e, por fim, a obtenção de uma função interpolada global por ponderação das funções locais. São apresentadas aplicações com funções de interpolação polinomiais nos casos 2D e 3D. É feita uma análise das potencialidades do método e são delineadas aplicações particularmente interessantes para este.

2-INTRODUÇÃO

Diversos algoritmos matemáticos têm sido empregados para a solução do problema da interpolação / 1 a 3 /. Métodos como o Polinômio de Lagrange ou ajuste de funções pelo Método dos Mínimos Quadrados (MMQ), são aqui denominados de globais, pois uma única expressão é empregada em todo o domínio para o cálculo da variável interpolada. Outros métodos, como a Spline Cúbica, assumem um caráter local, uma vez que a função é calculada por funções diferentes, válidas apenas em certos trechos.

As funções globais são mais facilmente tratadas matematicamente, porém são de aplicação mais restrita a um número reduzido de pontos relativamente bem comportados. Por exemplo, o Polinômio de Lagrange pode apresentar excessivas oscilações quando um número grande de pontos é utilizado. Por outro lado, as funções globais ajustadas pelo MMQ podem não representar a função interpolada com boa fidelidade se esta não for uma função

suficientemente suave.

As funções de interpolação locais são de cálculo indireto, porém são mais vantajosamente empregadas quando se dispõe de um grande número de pontos conhecidos e/ou quando se trata de uma função bastante irregular, isto é, não suave. Entretanto, um problema adicional deve ser resolvido: a garantia da continuidade da função interpolada e de suas derivadas em todo o domínio, inclusive na transição entre trechos adjacentes.

Este trabalho propõe um método de interpolação local que assegura a continuidade da função interpolada e de suas derivadas até a n -ésima ordem em todo o domínio interpolado. Em sua extensão 3D, além de assegurar as propriedades acima, não impõe nenhum tipo de restrição no que tange a distribuição dos pontos conhecidos sobre o domínio 2D, isto é, não é necessário que os pontos estejam sobre nenhum tipo de malha regular.

O método proposto é apresentado na forma 2D e, após, sua extensão para o espaço 3D.

3-INTERPOLAÇÃO 2D

Os métodos de interpolação são frequentemente utilizados em duas classes de aplicações básicas: numérica e gráfica. Por interpolação numérica entende-se o problema da determinação da variável dependente em função de qualquer valor da variável independente pertencente ao domínio, partindo-se apenas do conhecimento de alguns pares de pontos discretos pertencentes a esta função.

Em aplicações de computação gráfica, o interesse maior dos métodos de interpolação reside no problema da construção de uma linha contínua, geralmente curva, a partir de um certo número de pontos discretos pertencentes ou não a esta. Frequentemente a curva resultante intercepta uma reta vertical em mais de um ponto, portanto não constitui uma função matemática. Esta dificuldade pode ser facilmente contornada pelo uso da forma paramétrica das funções. / 1 /

O método proposto consiste na subdivisão do domínio total em elementos interpenetrantes, na interpolação local dentro do elemento por funções convenientes e, finalmente, a obtenção da função global através da aplicação de um mapa de ponderação apropriado. Embora esta função de interpolação local possa ser de qualquer natureza, como será visto mais tarde, será exemplificado apenas o caso de funções polinomiais.

A figura 1 exemplifica a interpolação de uma função pelo método proposto, utilizando polinômios de segundo grau para a interpolação local. Sejam n pares de pontos no espaço 2D do tipo:

$(k, f(k))$, onde k é um inteiro

Inicialmente determinam-se as equações das i -ésimas parábolas que passam pelos pontos:

$(i-1, f(i-1))$
 $(i, f(i))$
 $(i+1, f(i+1))$, onde $i = 1, 2, 3, \dots, n-2, n-1$

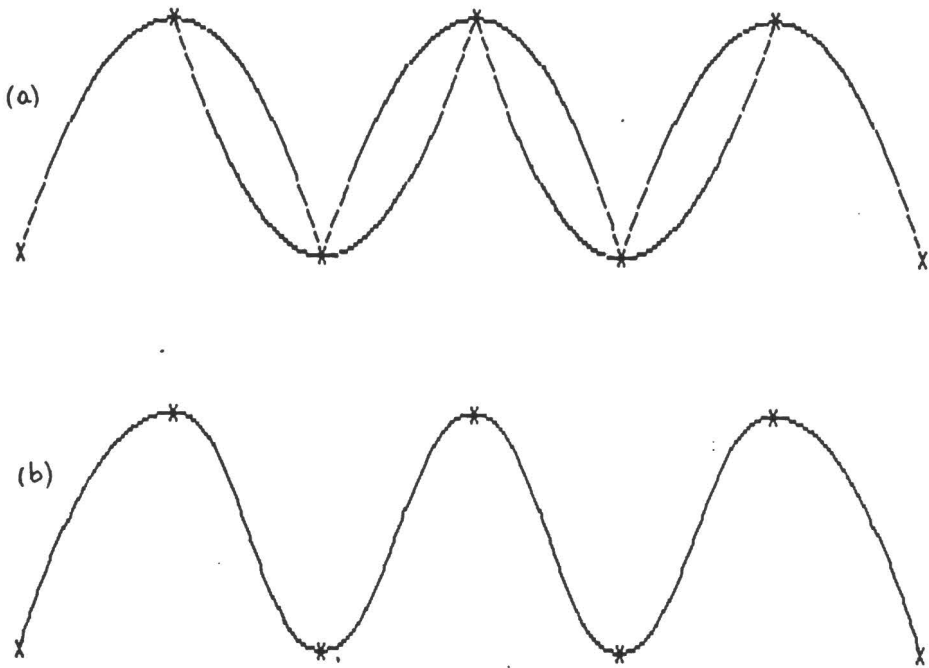


Fig 1 - Interpolação por parábolas ponderadas
 (a) parábolas locais
 (b) função obtida

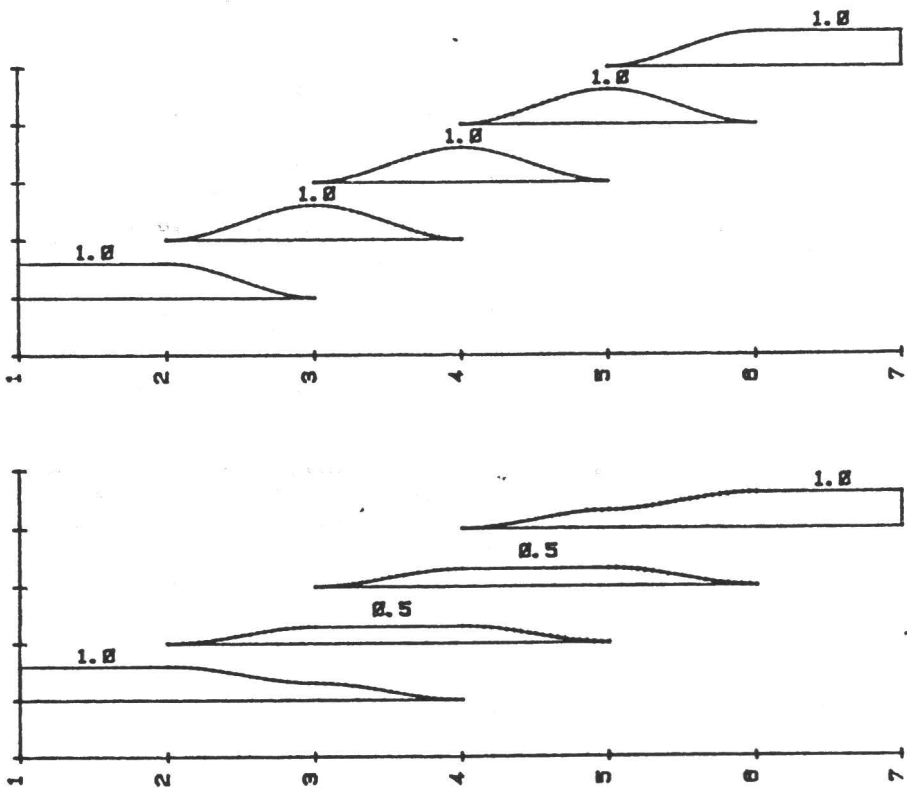


Fig 2 - Mapa de ponderação global
 (a) para funções locais descritas por três pontos
 (b) para funções locais descritas por quatro pontos

Estas parábolas representam bem a função interpolada apenas no intervalo compreendido entre os três pontos discretos considerados. (fig 1.a) Não há nenhuma garantia de continuidade da derivada entre parábolas associadas à elementos adjacentes.

O mapa de ponderação da figura 2.a é utilizado para a obtenção de uma função contínua em todo o domínio. Em cada trecho a função resultante é calculada pela soma ponderada das funções locais segundo o mapa de ponderação representado graficamente nesta mesma figura. Nota-se que em cada trecho a soma dos pesos é sempre unitária. A função interpolada resulta da intercalação gradativa e suave das funções locais, no caso parábolas, dando origem a uma única curva contínua.

A figura 3 mostra a família de funções de ponderação. A função de ponderação da figura 3.a é a de ordem zero, onde $P(0)=0$ e $P(1)=1$. A função interpolada com a função de ordem zero resulta em contínua, porém suas derivadas não serão contínuas. Se no mapa de ponderação da figura 2.a for usada a função de ponderação de ordem um, onde $P(0)=P'(0)=0$, $P(1)=1$ e $P'(1)=0$, a função resultante, além de contínua, apresentará a derivada de ordem um também contínua. Com o uso das funções de ordem 2 e 3, assegura-se a continuidade da função e de suas derivadas até a ordem 2 e 3 respectivamente.

A figura 1.b mostra um exemplo de função interpolada pelo método exposto acima. Os pontos discretos disponíveis estão assinalados com um "x". Nota-se que a função é contínua bem como suas primeiras e segundas derivadas. A curva não apresenta nenhum tipo de oscilação e passa necessariamente por todos os pontos discretos dados.

Tratando-se de interpolação matemática, ou mesmo gráfica, frequentemente os pontos discretos disponíveis estão sujeitos a erros aleatórios. Neste caso não é desejável que a função resultante passe necessariamente por todos os pontos disponíveis, mas represente a "tendência média" da amostra de pontos disponíveis, ou seja, deve ser ajustada aos pontos experimentais de forma a compensar os erros aleatórios.

Para se obter este efeito, é suficiente utilizar uma função de interpolação local que se ajuste aos pontos disponíveis no subdomínio correspondente. Quando a função global é obtida pela ponderação destas funções locais "ajustadas", a função resultante representa a "tendência média" dos pontos disponíveis.

As figuras 4 e 5 ilustram as duas situações descritas anteriormente, porém, na figura 5, aplicada a uma função descrita na sua forma paramétrica. Nas figuras 4.a e 5.a os pontos discretos foram interpolados localmente por parábolas que passam por cada três pontos. As figuras 4.b e 5.b resultam da interpolação local dos mesmos pontos discretos por parábolas ajustadas para cada 4 pontos sucessivos.

Em um caso geral, as funções de interpolação locais podem ser de qualquer natureza: polinômios, exponenciais, funções trigonométricas, etc, ajustadas localmente por qualquer critério: cálculo exato, MMQ, etc. A ponderação global é efetuada exatamente da mesma forma. Esta liberdade adicional assegura uma excelente fidelidade da função resultante em relação à quantidade interpolada.

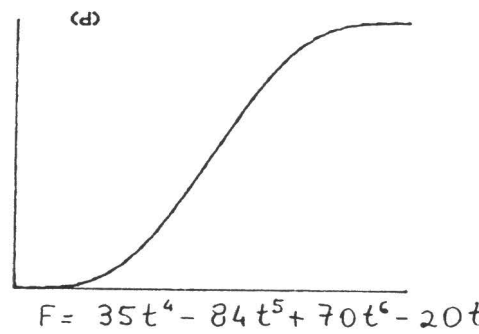
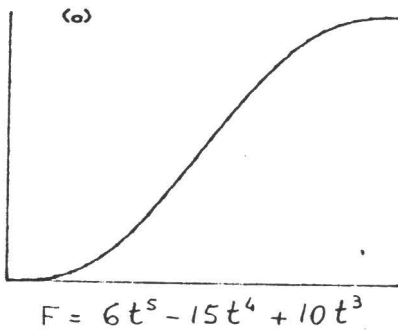
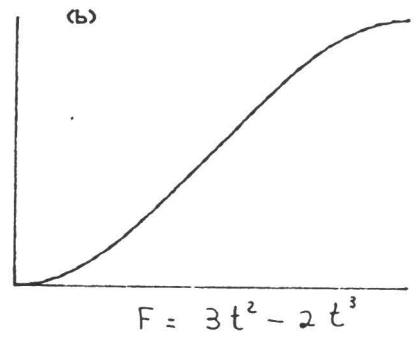
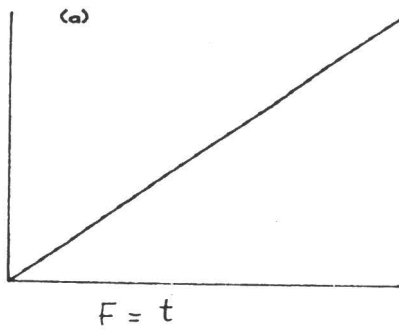


Fig 3 - Funções de ponderação
 (a) ordem 0
 (b) ordem 1
 (c) ordem 2
 (d) ordem 3

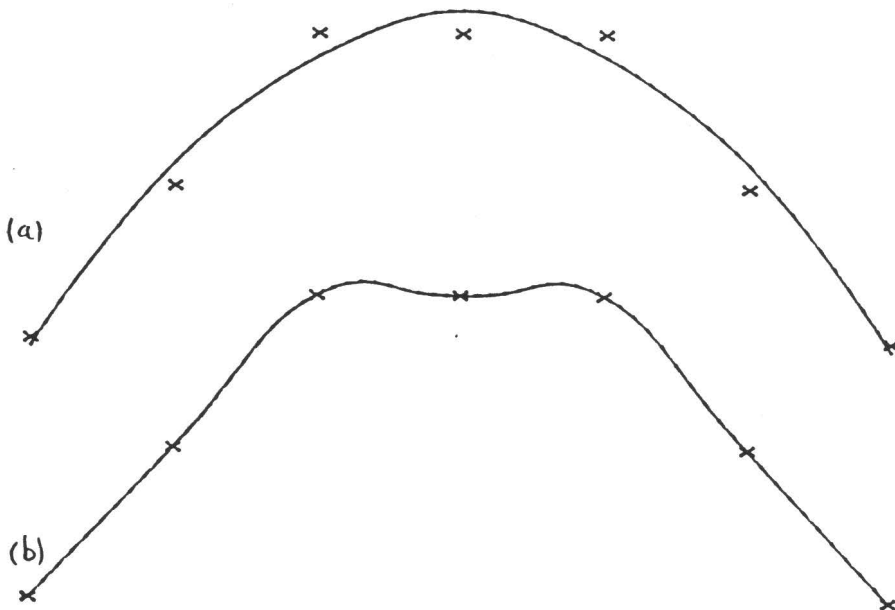


Fig 4 - Interpolação 2D dos mesmos pontos discretos
 (a) interpolação exata
 (b) interpolação pela tendência média

4 - INTERPOLAÇÃO 3D

Apresenta-se aqui a extensão do método para o caso de interpolação tridimensional. A extensão para espaços de dimensões maiores que 3 é imediata, porém sem interesse prático para a computação gráfica. A idéia global é a mesma: subdivisão do domínio 2D em elementos normalizáveis, interpolação local e a interpolação global por meio de um mapa de funções de ponderação 3D. Como no caso 2D, também no caso 3D a interpolação de superfícies que sejam cortadas mais de uma vez por uma reta vertical pode ser resolvida pela forma paramétrica das funções. Por esta razão, neste texto será tratado apenas do caso de interpolação de funções.

O domínio é dividido em uma série de elementos. Estes elementos, no caso retangulares, são obtidos de forma a haver uma certa superposição entre elementos adjacentes, como mostra a figura 6. Devido à superposição, nota-se que o subelemento B2-B3-C2-C3 pertence ao mesmo tempo aos elementos A1-A3-C1-C3, B1-B3-D1-D3, A2-A4-C2-C4 e B2-B4-D2-D4. Assim, nota-se que, a menos de subelementos adjacentes às bordas do domínio global, cada subelemento pertence simultaneamente a 4 elementos.

Os pontos discretos disponíveis, (X_i, Y_i, Z_i) , são classificados e identificados a que elementos do domínio pertencem. Em seguida, uma função 3D local é determinada para cada elemento, com base no conjunto de dados pertencente a este elemento. Esta função local, como no caso 2D, pode ser de qualquer natureza, entretanto deve-se assegurar que o número total de pontos disponíveis para cada elemento é compatível com a função de interpolação local, para se evitar indeterminações matemáticas. A função local pode ser de ordem diferente para certos elementos onde se espera variações mais suaves ou bruscas da quantidade interpolada.

Cada subelemento, não pertencente à borda, pertence simultaneamente a quatro elementos. Cada canto de um subelemento situa-se no centro de um elemento apenas, o qual, para fins de nomenclatura, recebe o seu nome. Assim é natural que o valor da função interpolada no ponto B2 corresponda ao valor da função local calculada para o elemento B2. No centro do elemento B2-B3-C2-C3 a função interpolada deve ser obtida pela ponderação equitativa das funções locais determinadas para os elementos B2, B3, C2 e C3.

A função de ponderação que atende aos requisitos acima, e ainda intercala suave e continuamente as funções locais dentro de um subelemento, é representada na figura 7. Sendo x e y as coordenadas normalizadas dentro de um subelemento, a função de ponderação 3D de segunda ordem apresenta as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} P(0, 0) &= 1 \\ P(0, 1) &= 0 \\ P(1, 0) &= 0 \\ P(1, 1) &= 0 \end{aligned}$$

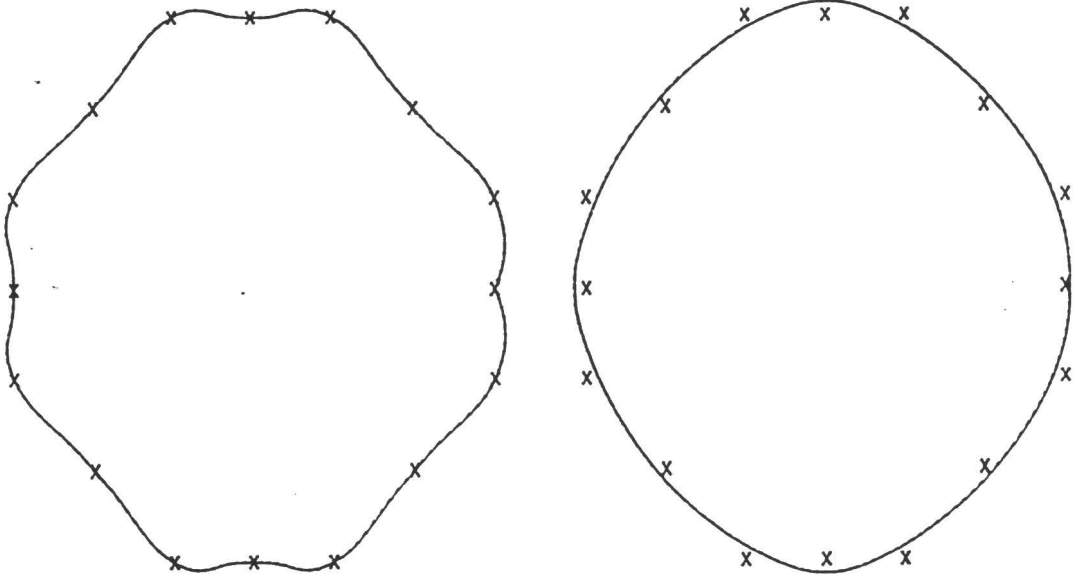


Fig 5 - Interpolação 2D de uma função na forma paramétrica
 (a) interpolação exata
 (b) interpolação pela tendência média

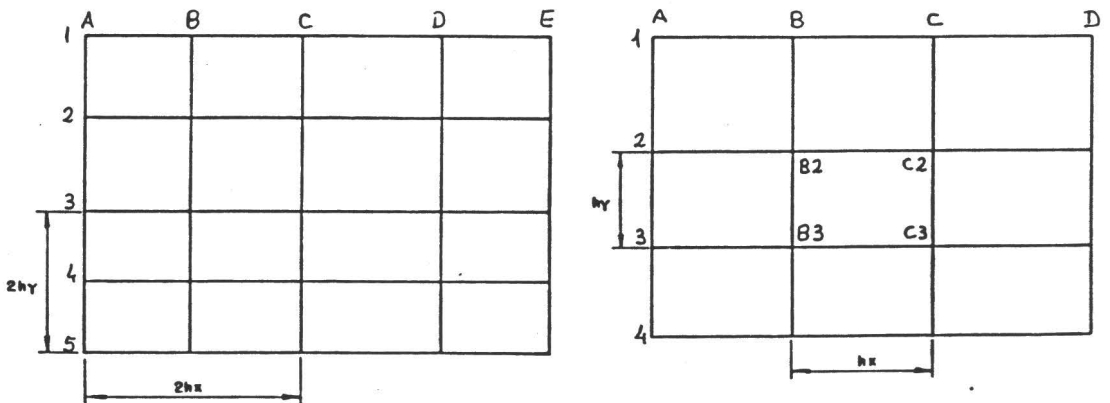


Fig 6 - Divisão do domínio 2D em elementos e subelementos.

adicionalmente, todas as primeiras e segundas derivadas espaciais de $P(x, y)$ com respeito a x e y , são nulas nos vértices, as derivadas em relação a x são nulas para $P(0, y)$ e $P(1, y)$, as derivadas em relação a y são nulas para $P(x, 0)$ e $P(x, 1)$, e a função e suas derivadas contínuas no interior do subelemento. A função interpolada é calculada no interior do subelemento B2-B3-C2-C3 pela expressão:

$$F(x,y) = B3(X,Y) P(x,y) + B2(X,Y) P(1-y,x) + C2(X,Y) P(1-y,1-x) + C3(X,Y) P(y,1-x)$$

onde:

- * $F(x,y)$ é a função global resultante
- * $B3(X,Y)$, $B2(X,Y)$, $C3(X,Y)$ e $C2(X,Y)$ são as funções locais determinadas para os elementos B3, B2, C3 e C2 respectivamente
- * $P(x,y)$ é a função de ponderação
- * X e Y são coordenadas globais
- * x e y são coordenadas locais do subelemento

A função global (FG) assim obtida, apresenta as seguintes propriedades:

- reduz-se ao valor da função local nos vértices dos subelementos;
- suas derivadas se reduzem ao valor das derivadas da função local correspondente a cada vértice de cada subelemento;
- é contínua dentro dos subelementos;
- suas derivadas espaciais, até a sua ordem, são contínuas dentro dos subelementos;
- é contínua e tem suas derivadas espaciais contínuas na borda entre subelementos adjacentes;
- é contínua e suas derivadas são contínuas em todo o domínio interpolado.

Pelo exposto até aqui, é possível concluir que não há nenhum tipo de restrição no que concerne à forma ou ordem de introdução dos pontos discretos conhecidos. Não é necessário que estes pertençam a nenhum tipo de malha regular. A única exigência é que atinjam o número mínimo requerido pelas funções de interpolação locais. Esta característica torna este método bastante atrativo para certas classes de aplicações especiais: é possível, por exemplo, alimentar o algoritmo com dados extraídos de curvas de nível e, com uma divisão e escolha apropriada de elementos e funções de interpolação locais, obter o relevo primitivo que deu origem ao mapa de curvas de nível utilizado para gerar os dados. A superfície finalmente obtida será contínua, com suas derivadas também contínuas, e tenderá a representar o relevo original. A maior ou menor fidelidade da superfície obtida será fortemente influenciada pela escolha correta do número de elementos e do tipo das funções de interpolação locais.

Outra aplicação interessante é a interpolação, em todo um domínio, de uma função potencial, partindo de linhas equipotenciais. São exemplos os campos elétricos e magnéticos, e a função ordem de franja, muito usada na interferometria. Com a continuidade da derivada assegurada, a derivada espacial do campo potencial pode ser facilmente obtida. Esta quantidade é muito útil em certas aplicações dentro da física e engenharia.

A figura 8 apresenta a superfície de um cone interpolado por meio de 7×7 elementos de primeira ordem (planos). Não foi usada a forma paramétrica desta superfície. Embora as funções de interpolação locais utilizadas não sejam adequadas para o tipo de superfície em questão, nota-se que o resultado final é muito bom na região mais afastada do vértice do cone, e sua qualidade obviamente decresce à medida que se aproxima deste. Este exemplo foi escolhido por ser, ao mesmo tempo, de fácil simulação e avaliação, e de difícil interpolação.

A figura 9 mostra o mapa de curvas de nível utilizado para construir o relevo da figura 10. O algoritmo foi alimentado somente com pontos sobre as curvas de nível. Foram utilizados no total 7×7 elementos de segunda ordem, segundo a disposição regular mostrada na figura 9. A figura 10 ilustra o resultado obtido. Nota-se que, a menos de fatores provocados pela deficiência da representação gráfica, que o resultado obtido é bastante bom. A superfície tende a representar bem os dois "picos" simulados por meio das curvas de nível e a continuidade total do relevo é ainda preservada. Este exemplo se presta para ilustrar as potencialidades do método.

5 - CONCLUSÕES

Os resultados apresentados ilustram parcialmente as potencialidades do método proposto. Dentro do campo da interpolação matemática, suas aplicações são vastíssimas, e especialmente interessantes por permitir a utilização de funções locais assemelhadas com a função a interpolar. A possibilidade de efetuar interpolações multi-dimensionais é um atrativo a mais.

Dentro da computação gráfica há um grande universo de aplicações factíveis. Desde a simples interpolação 2D de linhas curvas à obtenção de superfícies 3D esculpidas. Como grande atrativo introduz a liberdade na organização dos pontos discretos conhecidos, dispensando o uso de malhas regulares. Pode ser usado, com grande vantagem na topografia e no tratamento de problemas de funções potenciais.

6 - REFERÊNCIAS

- /1/ - TOZZI, C. L. "PAC - Projeto Auxiliado por Computador" Ed. Papirus - 1986
- /2/ - FOLEY, J. D. "A Fundamentals of Interactive Computer Graphics". Reading Mass: Addison-Wesley, 1982
- /3/ - NEWMAN, W. M. "Principles of Interactive Computer Graphics". New York: McGraw-Hill, 1973

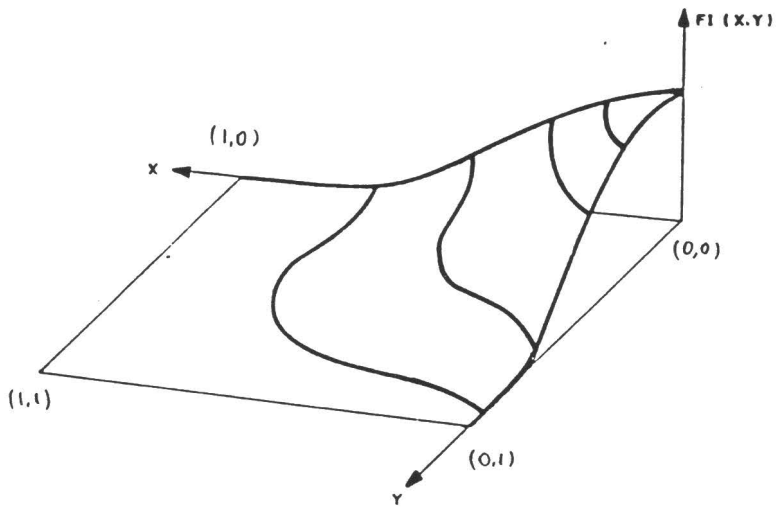


Fig 7 - Função de ponderação 3D de segunda ordem.

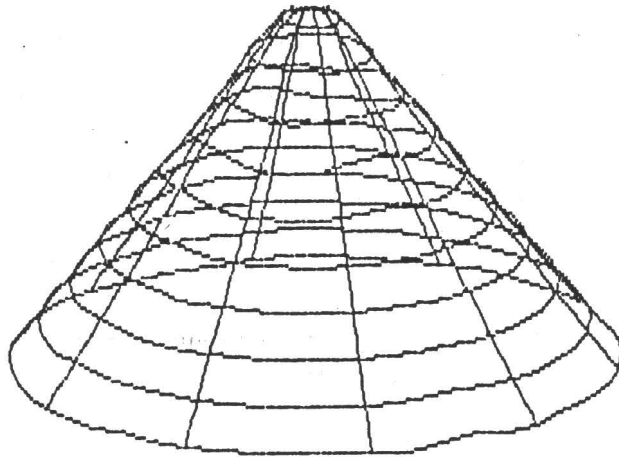


Fig 8 - Superfície de um cone interpolada por meio de 7×7 elementos de segunda ordem.

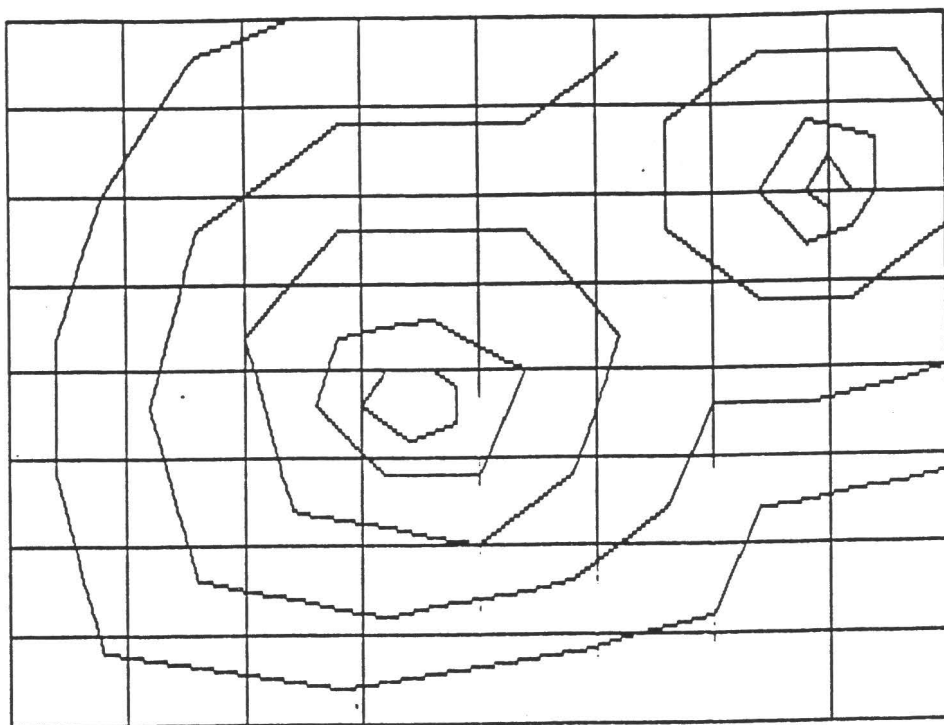


Fig 9 - Subdivisão do domínio e mapa de curvas de nível utilizado para gerar o relevo da figura 10.

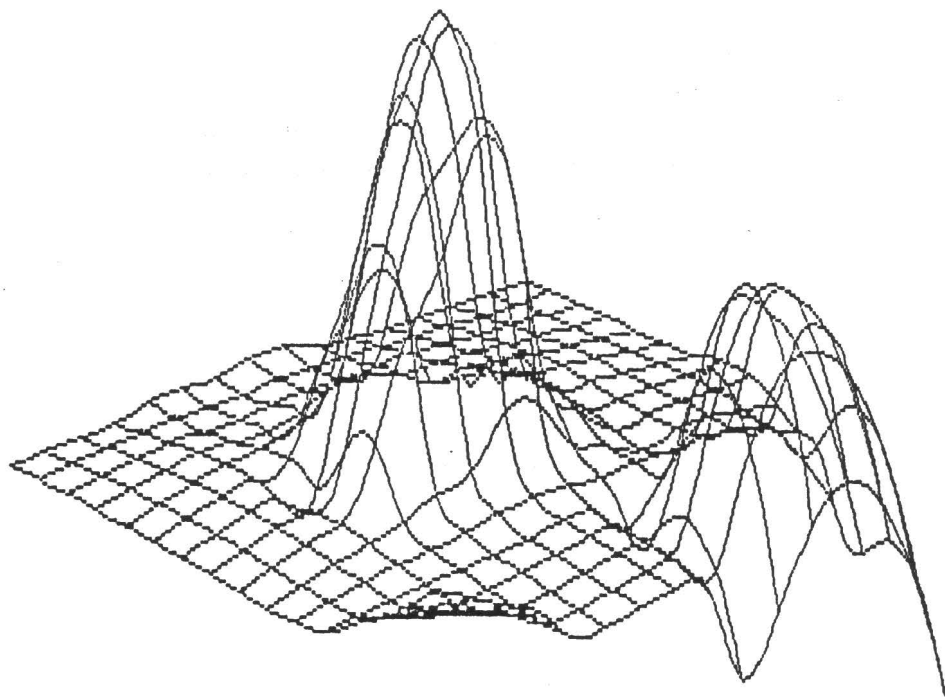


Fig 10 - Relevo gerado com 7×7 elementos de segunda ordem partindo das curvas de nível da figura 9.